Méthode de Laplace

<u>Théorème :</u> Soient $I =]a,b[$ un intervalle borné ou non, $\varphi \in \mathcal{C}^2(I,\mathbb{R})$ et $f \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{C})$. On suppose : (i) $\forall t > 0$, $\int_a^b e^{t\varphi(x)} |f(x)|\, dx < +\infty$;

(ii) φ' s'annule en un unique $x_0 \in I$ et $\varphi''(x_0) < 0$;

(iii) $f(x_0) \neq 0$.

Alors $F(t) \sim \dfrac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{|\varphi''(x_0)|}} e^{t\varphi(x_0)} f(x_0)\, t^{-1/2}$ quand $t \to +\infty$,

où $F(t) = \int_a^b e^{t\varphi(x)} f(x)\, dx$.

<u>Démonstration :</u> Par formule de Taylor avec reste intégral, on fixe $\psi : I \to \mathbb{C}$ $\mathcal{C}^0$ sur I, $\mathcal{C}^2$ sur $I \setminus \{x_0\}$ telle que $\varphi(x) = \varphi(x_0) + (x-x_0)^2 \psi(x)$ sur I, et $\psi(x_0) = \frac{1}{2}\varphi''(x_0)$. On fixe alors $\delta_1 > 0$ tel que $J_1 =]x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1[\subset]a,b[$ et $\psi(x) < 0$ sur J_1. La fonction $u : x \longmapsto (x - x_0)\sqrt{-\psi(x)}$ est alors $\mathcal{C}^0$ sur J_1, $\mathcal{C}^2$ sur $J_1 \setminus \{x_0\}$, et se prolonge en une fonction $\mathcal{C}^1$ sur J_1, telle que $u'(x_0) = \sqrt{-\frac{1}{2}\varphi''(x_0)}$. En effet, pour $x \neq x_0$, on a $\psi(x) = \dfrac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{(x-x_0)^2}$,

donc $(x - x_0)\,\psi'(x) = \dfrac{\varphi'(x) - \varphi'(x_0)}{x - x_0} - 2\psi(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$,

donc $u'(x) = \sqrt{-\psi(x)} - (x - x_0) \dfrac{\psi'(x)}{2\sqrt{-\psi(x)}} \xrightarrow[x \to x_0]{} \sqrt{-\frac{1}{2}\varphi''(x_0)}$.

Il existe alors $\delta \leqslant \delta_1$ tel que $u'(x) \neq 0$ pour $|x - x_0| \leqslant \delta$.

Soit à présent $\theta \in \mathcal{C}_c^\infty(]x_0 - \delta, x_0 + \delta[)$ tel que $0 \leqslant \theta \leqslant 1$ et $\theta = 1$ si $|x - x_0| \leqslant \frac{\delta}{2}$.

On écrit $F(t) = F_1(t) + F_2(t)$, avec $F_1(t) = \int_a^b e^{t\varphi(x)}\theta(x) f(x)\,dx$

$$F_2(t) = \int_a^b e^{t\varphi(x)}(1-\theta(x)) f(x)\,dx$$

• Etude de F_1 : Comme θ est nulle en dehors de $]a,b[$,

on a $F_1(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{t\varphi(x_0) + t(x-x_0)^2\psi(x)} \theta(x) f(x)\,dx$.

On pose alors, dans l'intégrale ci-dessus, $z = (x-x_0)\sqrt{-\psi(x)}$, ce qui est valable sur le support de θ. On a alors $x = g(z)$, avec $g(0) = x_0$,

$g'(0) = \dfrac{1}{\sqrt{-\psi(x_0)}} = \dfrac{1}{\sqrt{-\frac{1}{2}\varphi''(x_0)}}$, et $F_1(t) = e^{t\varphi(x_0)}\int_{\mathbb{R}} e^{-tz^2} h(z)\,dz$,

où $h : z \longmapsto \theta(g(z)) \cdot f(g(z))\, g'(z)$ est continue à support compact.

On pose ensuite $y = \sqrt{t}\, z$, ce qui donne $F_1(t) = \dfrac{e^{t\varphi(x_0)}}{\sqrt{t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} h\left(\dfrac{y}{\sqrt{t}}\right) dy$.

Or $e^{-y^2} h\left(\dfrac{y}{\sqrt{t}}\right) \xrightarrow[t\to+\infty]{} e^{-y^2} h(0)$, et $\left|e^{-y^2} h\left(\dfrac{y}{\sqrt{t}}\right)\right| \leqslant \sup_{\mathbb{R}} |h|\, e^{-y^2} \in L^1(\mathbb{R})$.

Par convergence dominée, $\sqrt{t}\, e^{-t\varphi(x_0)} F_1(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} h(0)\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2}dy = \sqrt{\pi}\, h(0)$.

De plus, $h(0) = \theta(x_0) f(x_0) g'(0) = \dfrac{f(x_0)}{\sqrt{-\frac{1}{2}\varphi''(x_0)}}$,

donc $F_1(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{-2\pi}{t\varphi''(x_0)}}\, f(x_0)\, e^{t\varphi(x_0)}$.

• Etude de F_2 : sur le support de $1-\theta$, on a $|x-x_0| \geqslant \frac{\delta}{2}$.

Comme φ' ne s'annule qu'en x_0 et que x_0 est un maximum, on a

$\varphi' > 0$ pour $x < x_0$, $\varphi' < 0$ pour $x > x_0$. On a alors :

$$\varphi(x_0) - \varphi(x) = \varphi(x_0) - \varphi(x_0 - \tfrac{\delta}{2}) + \varphi(x_0 - \tfrac{\delta}{2}) - \varphi(x)$$
$$\geqslant \varphi(x_0) - \varphi(x_0 - \tfrac{\delta}{2}) > 0 \quad \text{si } x - x_0 < -\tfrac{\delta}{2}$$

$$\varphi(x_0) - \varphi(x) = \varphi(x_0) - \varphi(x_0 + \tfrac{\delta}{2}) + \varphi(x_0 + \tfrac{\delta}{2}) - \varphi(x)$$
$$\geqslant \varphi(x_0) - \varphi(x_0 + \tfrac{\delta}{2}) > 0 \quad \text{si } x - x_0 > \tfrac{\delta}{2}$$

Donc sur le support de $1 - \theta$, on a $\varphi(x_0) - \varphi(x) \geqslant \mu > 0$.

Alors pour $t > 1$, $t\varphi(x) = \varphi(x) + (t-1)\varphi(x) \leqslant \varphi(x) + (t-1)\varphi(x_0) - (t-1)\mu$

donc $|F_2(t)| \leqslant e^{t\varphi(x_0)} \int_a^b e^{\varphi(x)} |f(x)|\, dx \; e^{-\varphi(x_0) - (t-1)\mu}$

donc $|F_2(t)|\, e^{-t\varphi(x_0)} \leqslant M e^{-t\mu}$, où $M = e^{\mu - \varphi(x_0)} \int_a^b e^{\varphi(x)} |f(x)|\, dx$
$< +\infty$

donc $e^{-t\varphi(x_0)} |F_2(t)|$ est à décroissance exponentielle,

alors que $e^{-t\varphi(x_0)} F_1(t)$ décroît en $\frac{1}{\sqrt{t}}$, donc $F_2(t) = o(F_1(t))$,

d'où $F(t) \underset{t \to +\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{|\varphi''(x_0)|}}\, e^{t\varphi(x_0)} f(x_0)\, t^{-1/2}$.

<u>Application</u> : Formule de Stirling

On a $\Gamma(t+1) = \int_0^{+\infty} x^t e^{-x}\, dx = \int_0^{+\infty} e^{t \ln x - x}\, dx$

$$= t e^{t \ln t} \int_0^{+\infty} e^{t(\ln y - y)}\, dy \qquad (x = ty)$$

On a : (i) $\int_0^{+\infty} e^{t(\ln y - y)}\, dy = \int_0^{+\infty} y^t e^{-ty}\, dy < +\infty$

(ii) $\varphi'(y) = \frac{1}{y} - 1 = 0 \Leftrightarrow y = 1$, et $\varphi''(1) = -1$

(iii) $f = 1$.

Donc $\Gamma(t+1) \underset{t \to +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}\; t^{t+\frac{1}{2}} e^{-t}$.

En particulier, $n! \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}\; n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$.